

**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΚΕΦ 2 - § 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12685

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4,$$

τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2.$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta.$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13053

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha.$

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha.$

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να

αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13088

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΚΕΦ 2 - § 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12673

Έστω πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}.$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}.$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 13323

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΚΕΦ 2 - § 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13177

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha-3|=3-\alpha$ και $|\beta+2|=\beta+2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha+\beta|+|\alpha-3|-|\beta+2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13179

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$

(Μονάδες 6)

ΚΕΦ 2 - § 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13943

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ και $\beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$

(Μονάδες 13)

ΚΕΦ 3 - § 3.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12917

Δίνεται η εξίσωση $(|\alpha-1|-3)x=\alpha+2$ (1), με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση για $\alpha=0$ και $\alpha=5$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $|\alpha-1|=3$.

(Μονάδες 8)

ii. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα β)i.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13169

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x-5 \leq 0 < x-2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2| - |x-5| = 2$.

(Μονάδες 15)

ΚΕΦ 3 - § 3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13028

Δίνεται η εξίσωση $ax^2-2ax-2a-2=0$, με $a \in \mathbb{R}^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

(Μονάδες 10)

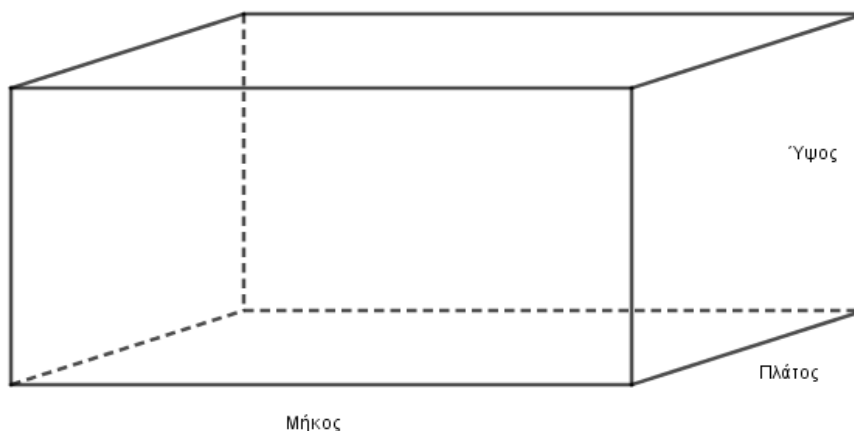
β) Για $a=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12683

Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της.

(Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι

κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 .

(Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 13320

Θεωρούμε τις εξισώσεις $ax^2+bx+c=0$ (I) και $gx^2+bx+a=0$ (II) όπου a, b, c είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $a \neq c$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.

(Μονάδες 8)

β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II).

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$.

(Μονάδες 8)

ΚΕΦ 4 - § 4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12909

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2,8)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13025

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

ΚΕΦ 4 - § 4.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13312

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

- β)** Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:
- Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. (Μονάδες 6)
 - Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (Μονάδες 5)
- γ)** Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. (Μονάδες 7)

ΚΕΦ 4 - § 4.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12722

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

- α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$ (Μονάδες 12)
- β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12976

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$. (Μονάδες 12)
- β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13321

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1) (Μονάδες 8)
- β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2) (Μονάδες 9)
- γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2). (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13174

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$ και $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$.

- α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B; (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$. (Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2d(x, 4) - 5$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13176

Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 5)

ΚΕΦ 5 - § 5.1-5.2 Ακολουθίες - Αριθμητική πρόοδος

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 13319

Δίνονται οι αριθμοί $1-x, \frac{x}{2}, 2x-1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x , αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12694

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 12764

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν a_n το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι a_n είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 και τη διαφορά ω .

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιπτές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12945

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3=8$ και και την αριθμητική πρόοδο (β_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_3=2$ και $\omega=3$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των $2n$ πρώτων όρων της είναι ίσο με το άθροισμα των n πρώτων όρων της (β_n) να βρείτε τον αριθμό n .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 13056

Οι αριθμοί 1,3,6,10,... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$n \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10^ο τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 13089

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

- i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

- ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_n) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_n , αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

(Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_n = \beta_{8-n}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots, 7$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 13171

Το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (a_n) είναι $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n = 2n^2 + 3n$, $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$, $n \geq 2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n + 1$, $n \geq 1$

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω .

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13173

Δίνεται η ακολουθία (a_n) με γενικό τύπο $a_n = 10n + 3$.

α)

- i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 6)

- ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της a_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (a_n) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

(Μονάδες 8)

ΚΕΦ 5 - § 5.3 Γεωμετρική πρόοδος

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12763

Δίνεται μία πρόοδος a_n με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$

α) Να εξετάσετε αν η a_n είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η a_n είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 12787

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12731

Έστω πραγματικοί αριθμοί k, λ ($k \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{k}{\lambda}, k, k \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{k}{\lambda}, k \cdot \lambda, (k > 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να

βρείτε τους αριθμούς $\frac{k}{\lambda}, k, k \cdot \lambda$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (a_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$

(Μονάδες 5)

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της

γεωμετρικής προόδου (a_n) είναι ίσο με $\frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

(Μονάδες 8)

ΚΕΦ 6 - § 6.1 Η έννοια της συνάρτησης

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12765

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

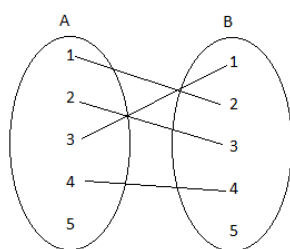
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6$, είναι αυτό δυνατό.

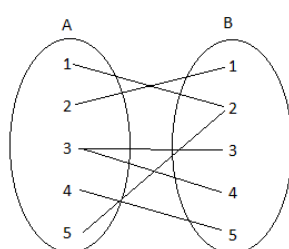
(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12908

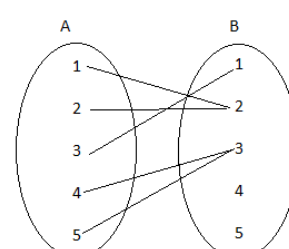
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B .



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B .

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12997

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α' Λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα A , με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α' τάξης ενός Γενικού Λυκείου και B με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α' τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g: B \rightarrow A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f: A \rightarrow B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B .

(Μονάδες 10)

- β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g : B \rightarrow A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο B στο σύνολο A και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 13026

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

(Μονάδες 10)

- β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2 = 4x - 1$.

(Μονάδες 15)

ΚΕΦ 6 - § 6.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12680

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(4,3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

- γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $N(-1,-2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12682

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 8)

- β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

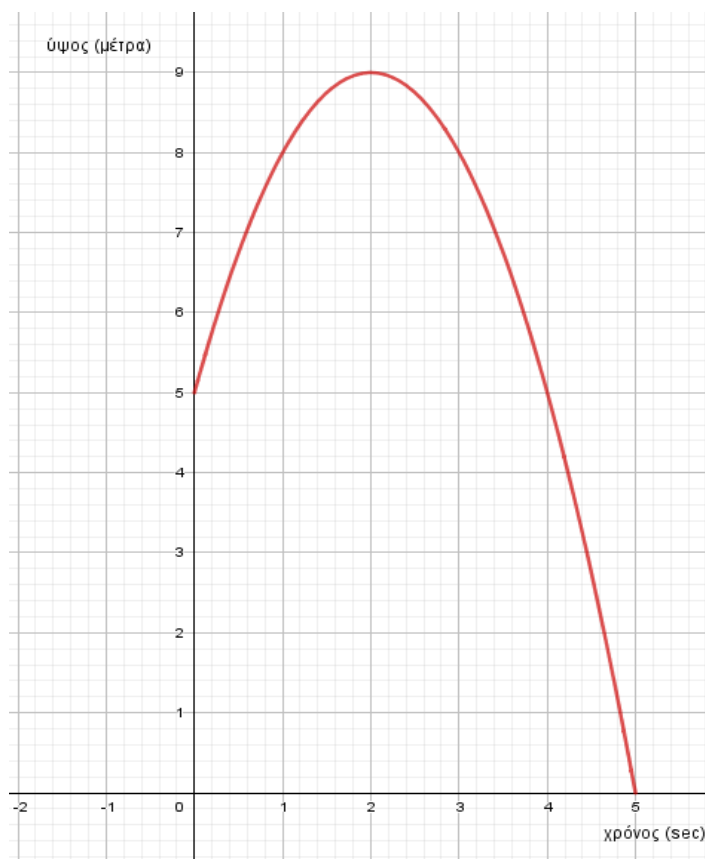
(Μονάδες 9)

- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12729

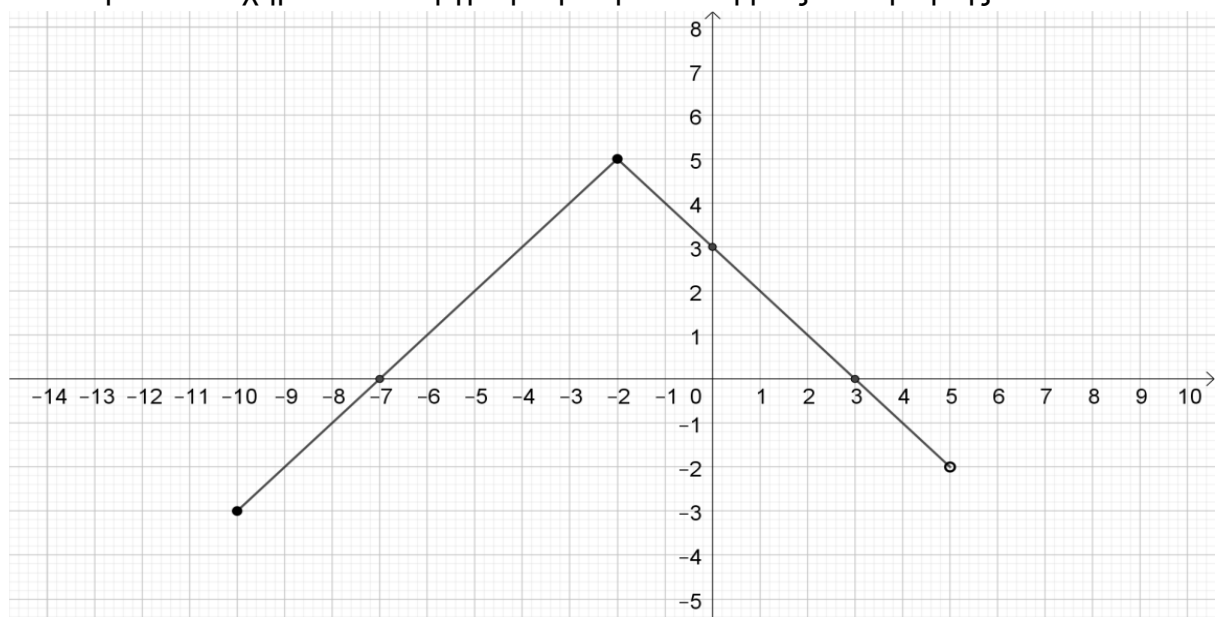
Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή, ώστε η απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) σε σχέση με το χρόνο (sec) να φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



- α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή; (Μονάδες 6)
- β) Ποιο το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό; (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα συναντά το έδαφος. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 12910

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σύνολο τιμών της $f(A)$.

- β)** Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$. (Μονάδες 8)
- γ)** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 0$. (Μονάδες 6)
- δ)** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$. (Μονάδες 4)
- (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13031

Δίνεται η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

- α)** Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x = 2$, $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)
- β)** Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G . (Μονάδες 7)
- γ)** Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G , στο 3. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13032

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x+5}$.

- α)** Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)
- β)** Να δείξετε ότι $f(-1) = g(11)$. (Μονάδες 8)
- γ)** Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x) = g(4)$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 13322

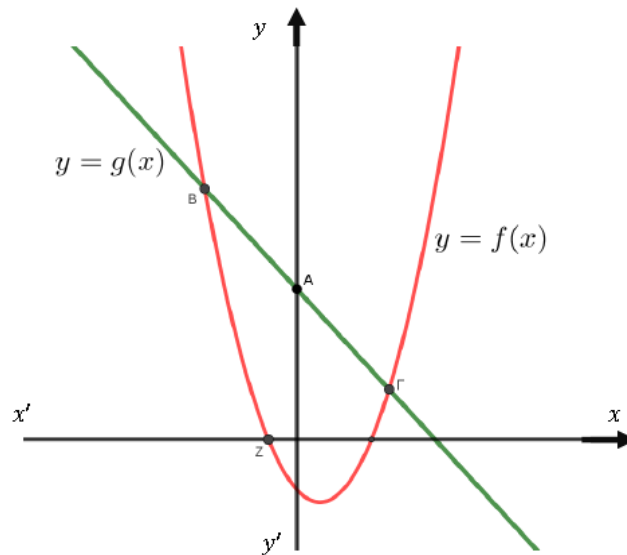
Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x^2+2} + \sqrt{x-1}$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g . (Μονάδες 8)
- β)** Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1$, $x=-2$, $x=2$. (Μονάδες 9)
- γ)** Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον y' άξονα; (Μονάδες 8)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12628

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ, Z. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y=f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y=g(x)$ (Μονάδες 6)
- γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α , η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1. (Μονάδες 9)

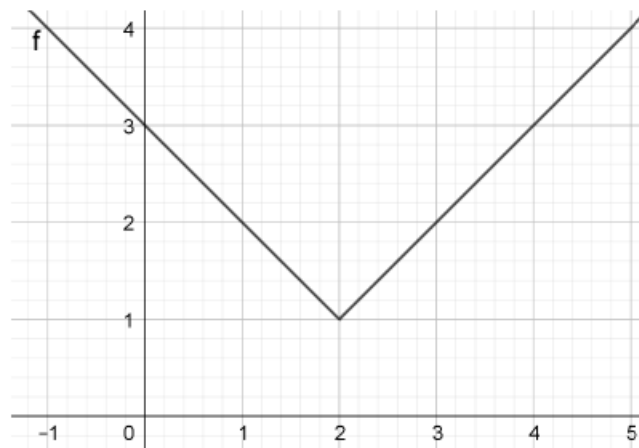
ΘΕΜΑ 12788

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3}) = 8$ (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$. (Μονάδες 9)
- γ) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq \beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12914

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=|x-2|+1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B . Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3-c, c)$ και $B(c+1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 12941

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

β) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x) = 3 + |x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $g(x) = 3 - x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 13027

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$ όπου $x \in \mathbb{R}$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) - 2kg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13030

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ και $g(x) = |x+3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g .

(Μονάδες 7)

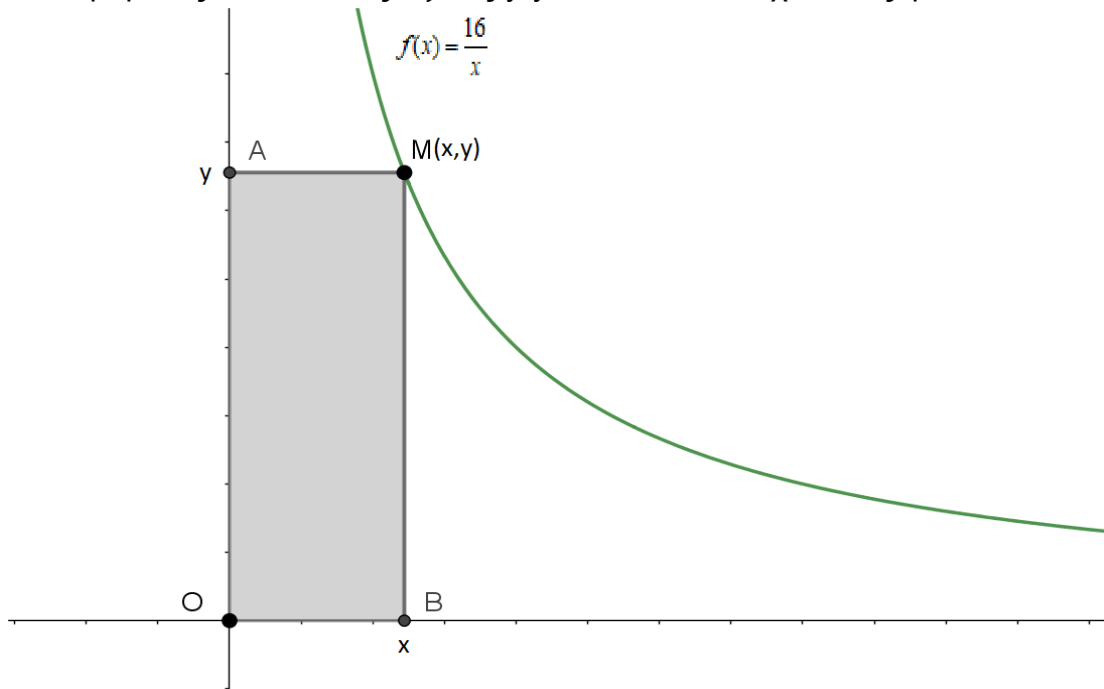
γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 13090

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{16}{x}$, $x > 0$.

Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης και έστω A και B οι προβολές του M στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια $OAMB$ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου M έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{32}{x}$ όπου x η τετμημένη του M .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M ώστε το ορθογώνιο $OAMB$ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν M' είναι το σημείο της γραφικής παράστασης f της ώστε το ορθογώνιο $OAM'B$ να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το M' έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο $OAM'B$ έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια $OAMB$, δηλαδή ότι $\Pi(x) \geq \Pi(4)$ για κάθε $x > 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

- β)** Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.
(Μονάδες 5)
- γ)** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 7)
- δ)** Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 13313

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο A ορισμού της f .
(Μονάδες 6)
- β)** Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
(Μονάδες 6)
- γ)** Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.
(Μονάδες 6)
- δ)** Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο σύνολο A .
(Μονάδες 7)

ΚΕΦ 6 - § 6.3 Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

2ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12630

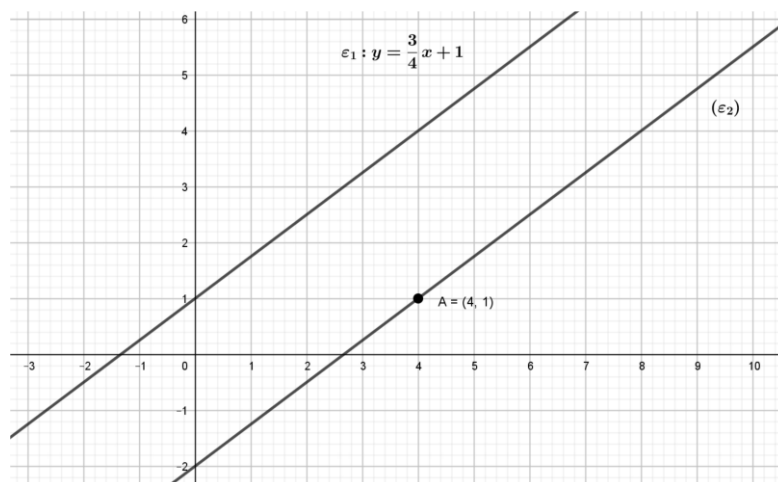
Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.

- α)** Να βρείτε τις τιμές των a και β .
(Μονάδες 8)
- β)** Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.
(Μονάδες 8)
- γ)** Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.
(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12631

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ϵ_1) με εξίσωση

$y = \frac{3}{4}x + 1$ και την (ϵ_2) που διέρχεται από το σημείο $A(4,1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1) .



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ϵ_2).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ_2) με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12684

Η ευθεία (ϵ_1) έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x - 2$ και μια ευθεία (ϵ_2) διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι παράλληλη στην (ϵ_1).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ϵ_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ϵ_2) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες;

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 12730

Δίνεται η ευθεία $y = ax + \beta$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12856

Δίνεται ευθεία $\epsilon: y = ax + 5$. Αν η ευθεία $\delta: y = -3x - 6$ είναι παράλληλη στην (ϵ), τότε:

α)

i) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ϵ .

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ϵ με τον άξονα $x'x$;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12939

Έστω η ευθεία $\epsilon_1: y = ax + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $A(0, -6)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-3, 0)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και β .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία ϵ_2 που είναι παράλληλη με την ϵ_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13033

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον $x'x$ άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία $A(6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(8, 0)$ είναι σημεία της ευθείας (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $(k, 5)$ να είναι σημείο της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 13054

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2: y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13178

Δίνεται το σημείο $M(3,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 9)

β) Δίνεται το σημείο $N(-3,\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM .

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $N(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M, N είναι συμμετρικά ως προς το O .

(Μονάδες 8)

4ο Θέμα

ΘΕΜΑ 12689

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_1(t) = 150 + 50t$, $t \in [0, 5]$.

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση: $Y_2(t) = 650 - 25t$.

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

(Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5ο μέχρι το 10ο λεπτό της κίνησής του;

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτερου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

(Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

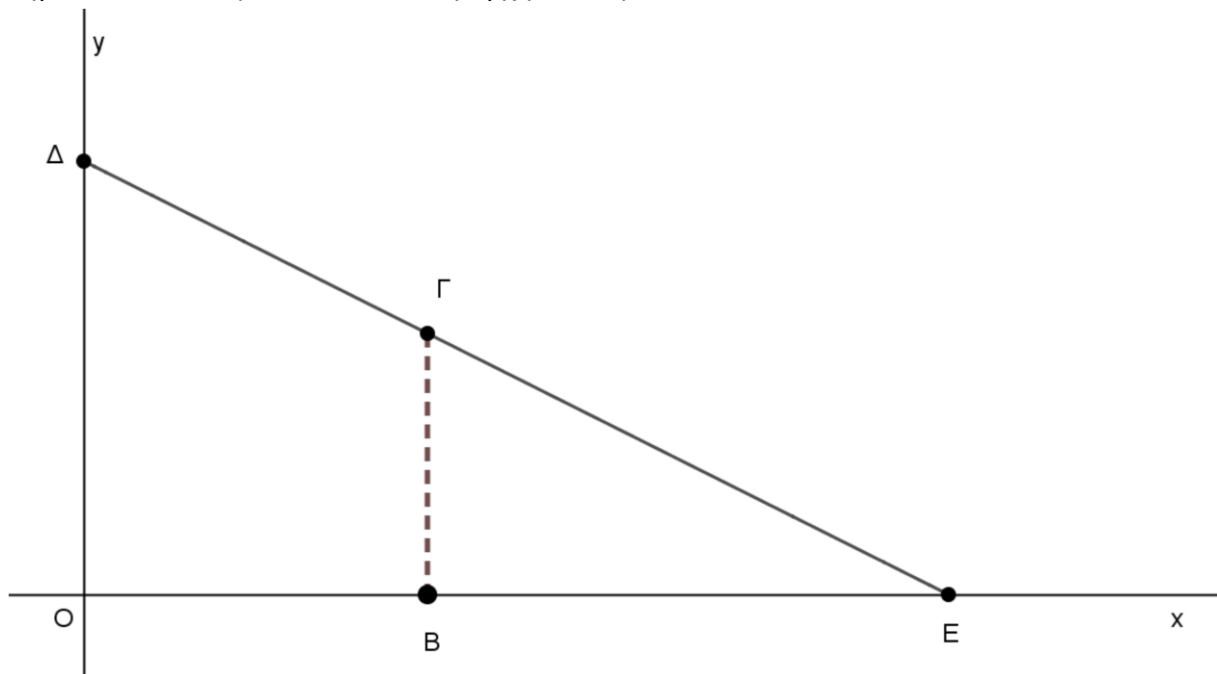
(Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει;

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 12728

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δείναι ένα σημείο στον y' άξονα, Έένα σημείο του x' άξονα και Οείναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας ΔΕείναι: $y + \frac{1}{2}x = 4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Εκαι Δ.

(Μονάδες 6)

Ένα σημείο $\Gamma(t, y_\Gamma)$ κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕκαι Βένα σημείο του x' άξονα, τέτοιο ώστε ΒΓνα είναι παράλληλη στον y' άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma = 4 - \frac{1}{2}t$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t) = 4t - \frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

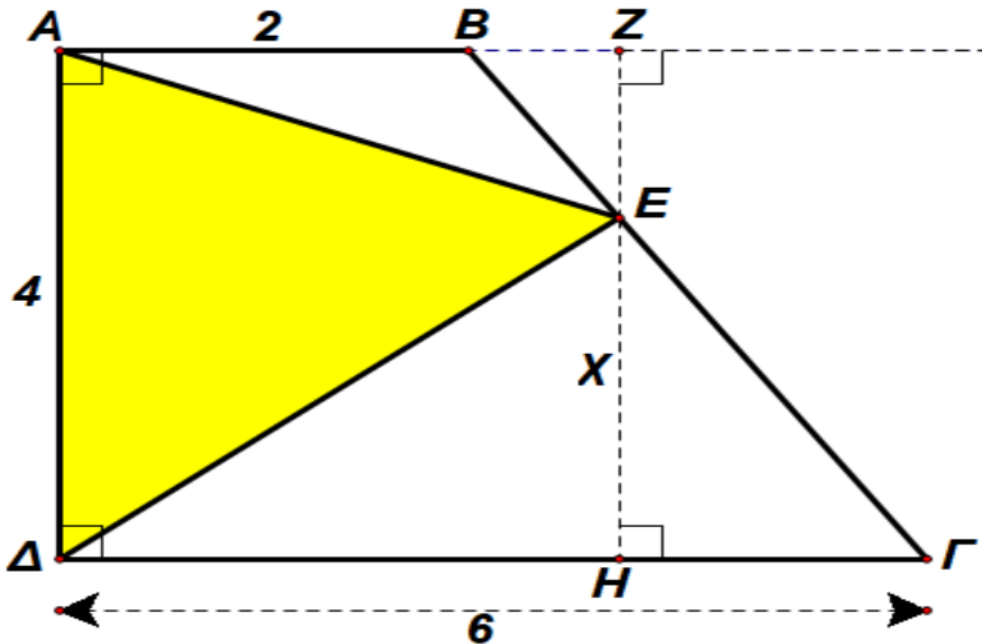
(Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με 9,75 τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 12834

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε $AB=2$, $AD=4$, $ΓΔ=6$, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=-2x+12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) + \dots + f\left(\frac{64}{16}\right)$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12921

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2|κ|x-2$ και η ευθεία $\epsilon: y=2x-κ^2$, $κ \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $κ \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου $κ$.

(Μονάδες 8)

γ) Για $κ=-3$ να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f .

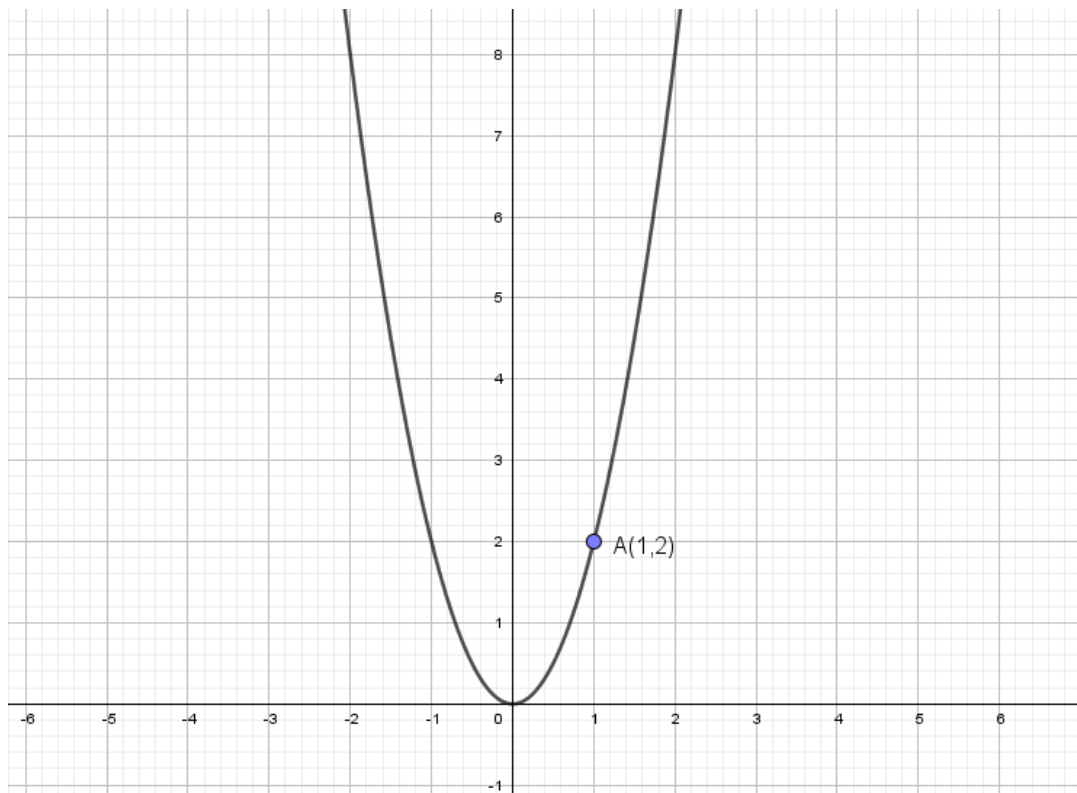
(Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12942

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=ax^2$ με παράμετρο a .



α) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $a=2$.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda=2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

(Μονάδες 4)

γ)

i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 2x+4$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 12999

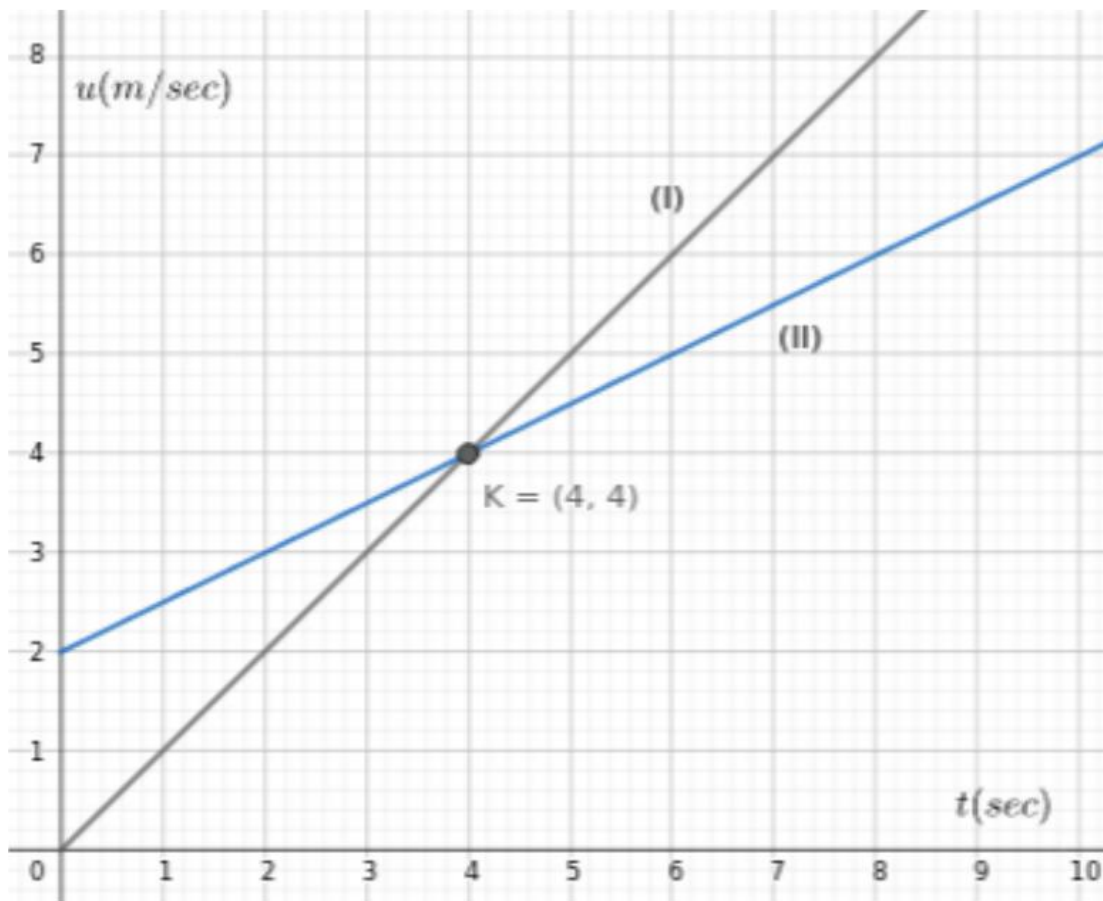
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u=u_0+a \cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i. Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



ii. Να προσδιορίσετε ποιο από τα οχήματα A, B κινείται ταχύτερα για κάθε χρονική στιγμή $t \text{ sec}, t \in (3,5)$.

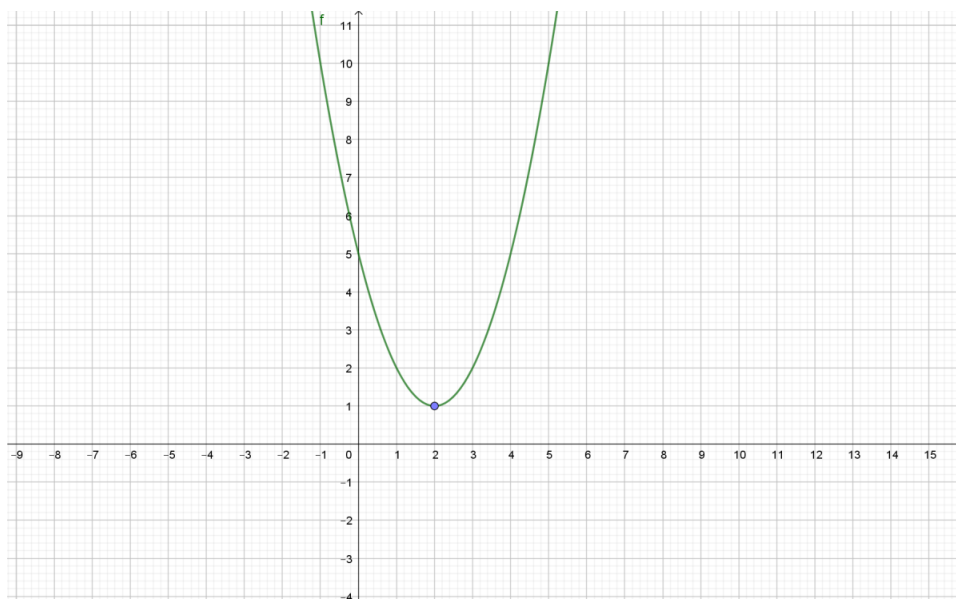
(Μονάδες 7)

iii. Αν ένα όχημα Γ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα 2 m/sec και επιτάχυνση μεγαλύτερη από την επιτάχυνση του οχήματος A, να σχεδιάσετε στο παραπάνω διάγραμμα μία ευθεία, η οποία θα μπορούσε να περιγράψει την κίνησή του.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13091

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13055

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x) = f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(3,52) - f(0,52) + f(3,48) - f(0,48)$

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta = -5$.

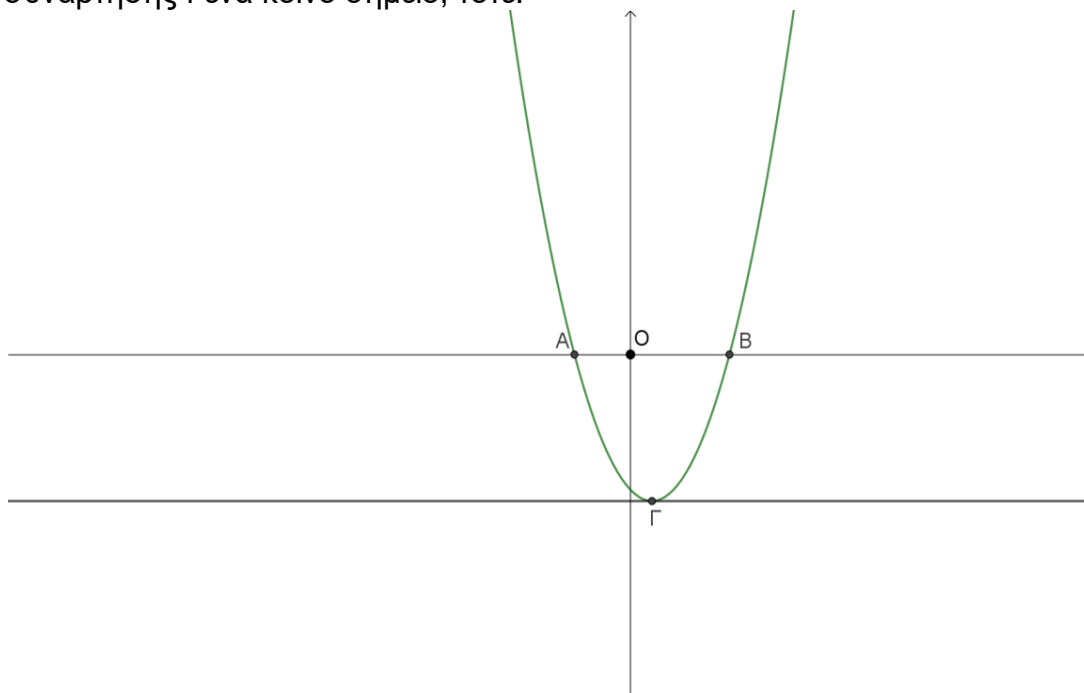
(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β , ώστε η C_n να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 13314

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $\Gamma(\gamma, \delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:



α) Να δείξετε ότι $\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) < 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ .

(Μονάδες 7)