# ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (2016)

## ΘΕΜΑ 1ο

i. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

ii. Τι καλείται αρχική συνάρτηση;

iii. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f$ στο $[\alpha,\beta]$ εκφράζει πάντα εμβαδό χωρίου μεταξύ της $C_f$ και του $x'x$

   Σωστό Λάθος

2. Το ορισμένο ολκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f$ στο $[\alpha,\beta]$ ισούται

   $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta_x\right)$

   Σωστό Λάθος

3. Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ .Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

   Σωστό Λάθος

4. Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 3$ τότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

   Σωστό Λάθος

5. Αν η $f$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$ με $f(x)\geq 0$ και $\alpha,\beta\in\Delta$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

   Σωστό Λάθος

## ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με $f(x) = 2\ln x - \frac{x^2}{2} + ax \;\&\; f(x)\leq f(1), \forall x>0$

**Β1.** Να δείξετε ότι $\alpha = -1$

**Β2.** Να βρεθούν η μονοτονία ,τα ακρότατα και η κυρτότητα της συνάρτησης

**Β3.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{x+2}{4}-\frac{3}{2x}}$

**Β4.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης στο $x_0 = 2$ και

να δείξετε ότι: $2\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x \le 2\ln 2$

**Β5.** Να βρεθεί το β ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) + \ln\beta, x \ge 1 \\ e^{\beta-1} - \dfrac{5}{2}, x < 1 \end{cases}$

## ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει :

$f'(x) + \dfrac{2x}{x^2+1} \cdot f(x) = f(x),\ f(0) = 1$ .

**Γ1.** Να δειχθεί ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

**Γ2**. Να μελετήσετε την $f$ ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right) = \dfrac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

**Γ4.** Αν $F$ μια παράγουσα της $f$ ,να αποδείξετε ότι:

i. $F(4x) - F(2x) < 2xf(4x), \forall x > 0$ και να δείξετε ότι

ii. η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{F(4x) - F(2x)}{x}, x > 0 \\ 2 \qquad ,x = 0 \end{cases}$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

iii. $\int_4^8 f(x)dx > 2\int_2^4 f(x)dx$

## ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

- $\left(e^x - 1\right) f(x) + \left(e^x - x\right) f'(x) = \left(e^x - x\right) f(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_0^{f(0)} \left(e^{x^2} + x^2 - 1\right) dx = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ όπου F μια παράγουσα της $f$ στο $\mathbb{R}$ .
- $g(x) = e^{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ και G παράγουσα της.
- $G(1) = 0$

**Δ1.** Να δείξετε ότι :

i. $e^x + x - 1 \ge 0 \qquad \forall x \ge 0$

ii $f(0) = 0$ και iii.να βρεθεί ό τύπος της $f$ .

Αν επιπλέον $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}, x\in \mathbb{R}$

**Δ2.** Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο τοπικά ακρότατα για την $f$ στα $x_0, x_1$ με $x_0<1<x_1$ και να βρεθεί το είδος τους.

**Δ3.** Να βρεθεί η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $m(x)=\dfrac{F(x)}{x}+x$ στο $+\infty$.

**Δ4.** Να δείξετε ότι:

i. $f(x)x-F(x)>f(x)-F(1), \forall x\in(1,x_1)$.

ii. Να δείξετε ότι $\int_1^0 G(x)dx<\int_0^{G(2)} G^{-1}(x)dx$ .