ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΕΛΙΚΟ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θ.FERMAT .

Β. Να δοθεί ο ορισμός της **κυρτής** συνάρτησης.

Γ. Να δοθούν οι απαντήσεις **σωστού, λάθος.**

1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει $f'(x_0)=0$.

   Σωστό **Λάθος**

2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ενός σημείου του x_0, στο οποίο η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) τότε $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

   Σωστό **Λάθος**

3. Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του παρανομαστή δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες

   Σωστό **Λάθος**

4. Αν $\mathrm{A}(x_0 f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ,τότε $f''(x_0)=0$

   Σωστό **Λάθος**

5. Αν f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

   Σωστό **Λάθος**

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1)=\dfrac{1}{e}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $xf'(x)-e^{-x}=-xf(x)$, για κάθε $x>0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{e^x}$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο των τιμών της.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $ef\left(e^{3f(x)-1}\right)-1=0$ έχει ακριβώς δυο θετικές ρίζες.

δ. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γ με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $2\xi\left(1-3f(\xi)\right)=3\left(\xi^2+1\right)f'(\xi)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=-1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την σχέση $e^{x+1}\left(1+f'(x)\right)=\dfrac{2x}{e^{f(x)}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση F , η οποία είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(\frac{x^4+2x^2+2}{x^2+6x+10}\right)=f\left(e^{x^2-x-2}\right).$$

γ. Να δείξετε ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής και στη συνέχεια ότι οι εφαπτόμενες σ' αυτά τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ. Να δείξετε ότι $xF(x)+F\left(x^3\right)<(x+1)F\left(x^2\right)$ για κάθε $x>1$.

ε. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ασύμπτωτη για την C_f .

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- f παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$
- $h(x)=x^2-F(x)$, όπου F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.
- $g(x)=2x-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$
- Η h παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$ το 0
- $\ln\left(1+g^2(x)\right)=g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

α. Να δειχθεί ότι: $f(0)=0$

β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x=1+x^2$

γ. Να δειχθεί ότι $g(x)=0\ \ \forall x$

δ. Να δειχθεί ότι $f(x)=x^2e^{2x}$.

ε. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x^2-e^{-2x-3}\right)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

στ. Να δειχθεί ότι η h έχει ακριβώς 2 ακρότατα και να βρεθεί το είδος των ακρότατων αυτών

ζ. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-F(x)}{x}$.